

۱- گزینه ۲ صحیح است.

برای محاسبه بازه همگرایی از آزمون کوشی استفاده می کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n} < 1 \Rightarrow \left| \frac{x-1}{x} \right| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 1 - \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow -1 < \frac{1}{x} - 1 < 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \infty$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{ همگرا لایب نیتس } S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2-1}{2}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\Rightarrow \text{بازه همگرایی: } \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

۲- گزینه ۳ درست است.

ابتدا سیگما داخلی را ساده می کنیم (جمله مجموع جزئی آن را پیدا می کنیم).

$$\sum_{k=0}^n r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{(1)(1-r^{n+1})}{1-r}$$

حال برای محاسبه دامنه همگرایی از آزمون کوشی استفاده می کنیم.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right) x^n \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\left|\frac{1-r^{n+1}}{1-r}\right| x^n} < 1$$

$$\begin{aligned} |r| < 1 \\ \sim |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{aligned} \quad \left(n \sqrt[n]{1-r} \sim 1 \right)$$

$r^{n+1} \rightarrow 0$

$$\text{بررسی نقاط مرزی: } \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \\ x = -1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \end{array} \right\} \xrightarrow{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0} \text{هیچکدام شرط لازم را ندارند}$$

لذا بازه همگرایی سری $(-1, 1)$ است.

۳- گزینه ۳ صحیح است.

$$f(x) = \sin(e^x - 1) = (e^x - 1) - \frac{(e^x - 1)^3}{3!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \rightarrow e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{(x + \frac{x^2}{2})^3}{3!} \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{24} - \frac{3(x^2)(\frac{x^2}{2})}{3!} = \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{4} = -\frac{5x^4}{24}$$

توجه شود که با وجود توان ۳ در جمله دوم بسط سینوس تنها جمله $3a^2b$ با $a = x, b = \frac{x^2}{2}$ خروجی از جنس x^4 تولید می‌کند.

۴- گزینه ۱ صحیح است.

روش حل تبدیل سری عددی به تابع معادلش است که $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ است.

$$\text{سری پایه: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{int}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln|1-x|$$

$$\xrightarrow{\text{int}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = -x \ln(1-x) - \int \frac{x}{1-x} dx$$

$$\rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = -x \ln(1-x) + \int \frac{1-x-1}{1-x} dx = -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x)$$

$$\xrightarrow{\div x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{x + (1-x) \ln(1-x)}{x^2}$$

$$\xrightarrow{x=-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1 + 2 \ln 2}{1} = 2 \ln 2 - 1$$

۵- گزینه ۳ صحیح است.

ابتدا سری را به دو سری مجزا تبدیل می‌کنیم، سپس براساس فرم چهارم سوالات مک لورن معادل آن را پیدا می‌کنیم.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1} n!}$$

$$\text{تابع معادل: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \rightarrow x_0 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$\text{سری پایه: } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{\times x} x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} n!} \Rightarrow S_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} \\ x_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} n!} \xrightarrow{\times (-1)} S_2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1} n!} \Rightarrow S_2 = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} \end{cases}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{e^{\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}}{2} = \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$$